

Sondage atmosphérique

1^{ère} partie :

Thermodynamique de l'atmosphère

1.1 Étude préliminaire

1.1.1 Equilibre hydrostatique

1.1.1.1 soit une tranche $[z, z+dz]$ de surface S , l'équilibre mécanique de la tranche dans le référentiel Galiléen s'écrit : $\vec{0} = \mu_a S dz \vec{g} + p_a(z+dz)S(-\vec{z}) + p_a(z)S\vec{z} \iff \frac{dp_a(z)}{dz} = -g\mu_a(z)$

1.1.1.2 on a : $p_a V = nRT_a = \frac{m}{M}RT_a \iff \mu_a = \frac{m}{V} = \frac{p_a M}{RT_a}$ A.N : $\mu_0 = 1.2 \text{ kg.m}^{-3}$

1.1.1.3 $\frac{dp_a}{dz} = -\frac{Mg}{RT_a} p_a$

1.1.2 Application : Modèle de l'atmosphère isotherme

1.1.2.1 T_a est constante 1.1.1.3 $\implies p_a = A \exp -\frac{Mg}{RT_a} z$ en $z = 0$ on a $p_a(0) = p_0$ donc : $p_a(z) = p_0 \exp -\frac{Mg}{RT_a} z$, soit : $H_a = \frac{RT_a}{Mg}$

1.1.2.2 H_a est la longueur caractéristique de l'atténuation de la pression, est aussi la pente à l'origine; après $5H_a$ la pression est quasi-nulle! A.N : $H_a = 8.5 \text{ km}$

Δz_1 est donné par : $p_a(\Delta z_1) = p_0 \exp -\frac{\Delta z_1}{H_a} = 0.99p_0 \iff \Delta z_1 = \ln(0.99)H_a = 85 \text{ m}$, la pression varie notablement à l'échelle de H_a

1.1.2.3 $\mu_a = \frac{p_a M}{RT_a} = \frac{p_0 M}{RT_a} \exp -\frac{z}{H_a} = \mu_0 \exp -\frac{z}{H_a}$

1.1.3 Poussée d'Archimède

$$\vec{\Pi}_A = \int \int \int -\vec{\nabla} p_a d\tau = \int \int \int -\mu \vec{g} d\tau = -m_d \vec{g}$$

1.2 Sondage de l'atmosphère

1.2.1 $V_c = \frac{4\pi}{3} \frac{\phi_c^3}{8} = 268 \text{ m}^3$

1.2.2 $\vec{F} = \vec{P}(\text{ballon}) + \vec{P}(\text{gazHe}) + \vec{\Pi}_A = (m + n.M_{He} - m_d)\vec{g}$

on a : $m_d = n_d.M_a = \frac{p_a V M_a}{RT_a} = n.m_a$ soit : $\vec{F} = (m + n.M_{He} - nM_a)\vec{g}$

1.2.3 le ballon décolle en $z = 0$ si $\vec{F} \cdot \vec{z} > 0 \iff n > n_{min} = \frac{m}{M_a - M_{He}} (> 0)$

en $z = 0$ on aura : $V_{min} = \frac{n_{min} RT_0}{p_0} = \frac{m}{M_a - M_{He}} \frac{RT_0}{p_0}$ A.N : $n_{min} = 800 \text{ mol}$ et $V_{min} = 19 \text{ m}^3$

1.2.4

1.2.4.1 on a : $n = \frac{m_{He}}{M_{He}} = \frac{9}{4 \cdot 10^{-3}} = 2250 \text{ mol} > n_{min} = 800 \text{ mol}$ le ballon décolle

1.2.4.2 l'ascension est rapide or les échanges thermiques sont lents donc négligés, de plus lors de l'ascension la pression décroît donc détente adiabatique

1.2.4.3 on a : $n = 2250 \text{ mol}$ donc $V_0 = \frac{nRT_0}{p_0} = 53 \text{ m}^3 < V_c$

1.2.4.4 détente adiabatique réversible : entre $z = 0$ et $z = z_{max}$

$$\implies p_0 V_0^{\gamma'} = p_a(z_{max}) V_c^{\gamma'} = p_0 e^{-\frac{z_{max}}{H_a}} V_c^{\gamma'} \implies z_{max} = \gamma' H_a \ln \frac{V_c}{V_0}$$

A.N : $z_{max} = 23 \text{ km}$ à cette altitude le ballon éclate

1.2.5 Non , car T varie

1.2.6

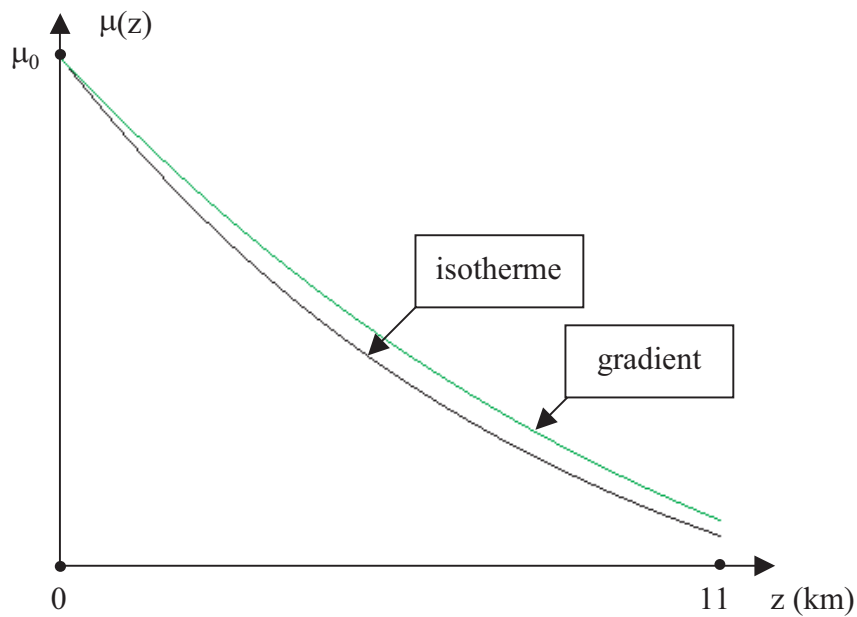
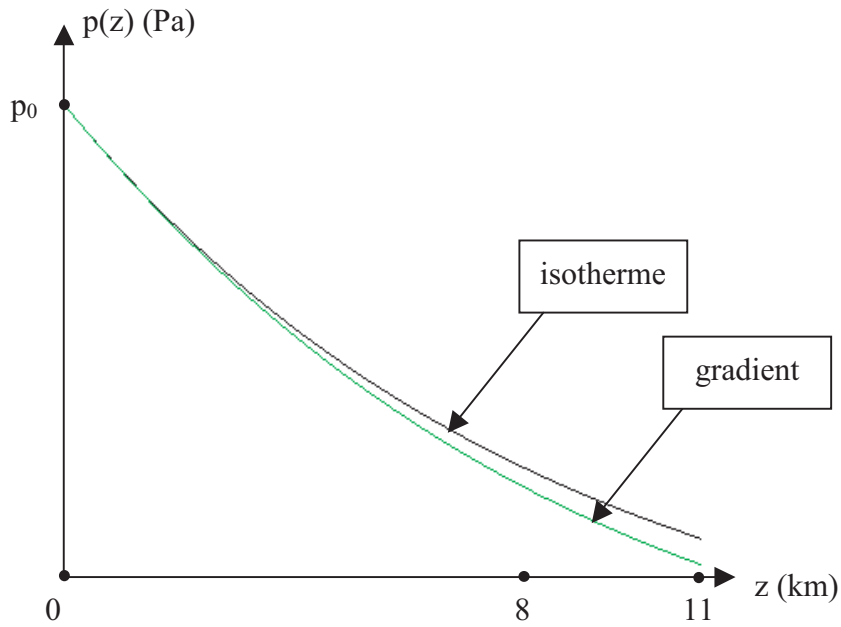
1.2.6.1 $\Gamma = -\frac{dT_a}{dz} = 6 \cdot 10^{-3} K.m^{-1}$

1.2.6.2 on a : $T_a = -\Gamma z + T_0 > 0$ donc $\frac{dp_a(z)}{dz} = -\frac{p_a M g}{R(T_0 - \Gamma z)}$ séparation des variables

$$\int_{p_0}^p \frac{dp_a(z)}{p_a} = - \int_0^z \frac{M g dz}{R(T_0 - \Gamma z)} \implies$$

$$p_a(z) = p_0 \left[1 - \frac{\Gamma z}{T_0}\right]^{\frac{M g}{R \Gamma}} \text{ et } \mu_a(z) = \frac{p_a M}{R T_a} = \mu_0 \left[1 - \frac{\Gamma z}{T_0}\right]^{\frac{M g}{R \Gamma} - 1}$$

1.2.6.3 A.N : $\frac{M g}{R \Gamma} = 5.7$



1.3 Stabilité de l'atmosphère

1.3.1 loi de Laplace s'applique pour la transformation adiabatique quasi-statique (réversible) d'un gaz parfait : $p^{1-\gamma}T^\gamma = cte$

1.3.2 $\frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{dp_a}{p_a} + \frac{dT}{T} = 0 \iff -\frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{Mgdz}{R(T_0-\Gamma z)} + \frac{dT}{(T_0-\Gamma z)} = 0 \iff \Gamma_s = -\frac{dT}{dz} = \frac{Mg}{R} \frac{\gamma-1}{\gamma}$

A.N :

$$\Gamma_s = 9.8 \cdot 10^{-3} K.m^{-1}$$

1.3.3 $\vec{F} = \vec{\Pi}_A + \mu V \vec{g} = (\mu - \mu_a) V \vec{g}$

1.3.4

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{\mu V} = \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu}\right) \vec{g}$$

la transformation étant réversible $p_a = p \iff \frac{RT_a \mu_a}{M_a} = \frac{RT \mu}{M_a} \implies \vec{f} = \left(1 - \frac{T}{T_a}\right) \vec{g}$

1.3.5 lorsque la masse d'air monte, la force de rappel doit être vers le bas, l'atmosphère sera stable :

$$T < T_a \iff -\Gamma_s z + T_0 < -\Gamma z + T_0 \iff \Gamma < \Gamma_s = \Gamma_{max}$$

1.3.6 $\mu V \ddot{z} = \vec{F} \cdot \vec{z} \implies \ddot{z} = -(1 - \frac{T}{T_a})g = \frac{\Gamma - \Gamma_s}{T_0 - \Gamma z} z g$

1.3.7 or au voisinage de z_i :

$$T_0 - \Gamma z \approx T_0 - z_i \Gamma = T_i$$

soit :

$$\ddot{z} + \frac{\Gamma_s - \Gamma}{T_i} g z = 0$$

donc $\omega = \sqrt{\frac{\Gamma_s - \Gamma}{T_i} g}$

A.N : $T(z_i = 3km) = 270K$; $\omega = 1.1 \cdot 10^{-2} Hz$ et la période $\Delta t = 9.5 mn$ (raisonnable)

2^{ème} partie :

Mouvement d'un ballon-sonde

2.1 Grandeurs cinématiques

2.1.1 G est tel que : $m_1 \vec{GB} + m_2 \vec{GC} = \vec{0} \implies m_1 \ell_1 = m_2 \ell_2$ d'autre part $\ell_1 + \ell_2 = BC$

$$\implies BG = \ell_1 = \frac{m_2 BC}{m_1 + m_2} = 2 m$$

2.1.2 $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{x}$

2.1.3 dans le plan xOy on a :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_G + \vec{\Omega} \times \vec{GB} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ -\ell_1 \sin \theta \\ \ell_1 \cos \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{y} - \ell_1 \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{z} - \ell_1 \dot{\theta} \sin \theta \end{vmatrix}$$

2.1.4 composition des vitesses $\vec{U} = \vec{v}_{B/atm} = \vec{v}_B - \vec{V}_{vent}$ soit : $\vec{U} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{y} - \ell_1 \dot{\theta} \cos \theta - V \\ \dot{z} - \ell_1 \dot{\theta} \sin \theta \end{vmatrix}$

2.2 Bilan de forces

2.2.1 on a : $N = [C_x] \cdot m^2 \cdot kg \cdot m^{-3} \cdot m^2 \cdot s^{-2} \implies C_x$ est sans unité ; A.N : $k = 6.5 kg \cdot m^{-1}$

2.2.2 $\vec{\Pi}_A = -m_d \vec{g} = \mu_a g \frac{\pi \Phi^3}{6} \vec{z}$ A.N : $\Pi_A = 427N$

$$2.2.3 \quad \vec{F} = (m_1 + m_2)\vec{g} + \vec{\Pi}_A + \vec{R}_a = \begin{vmatrix} 0 \\ -kUU_y \\ -Mg + \Pi_A - kUU_z \end{vmatrix}$$

2.2.4

$$\vec{M}_G = \vec{M}_G(\vec{P}, G) + \vec{M}_G(\vec{\Pi}_A, B) + \vec{M}_G(\vec{R}_a, B) = \vec{GB} \times (\vec{\Pi}_A + \vec{R}_a) = \begin{vmatrix} 0 \\ -\ell_1 \sin \theta \\ \ell_1 \cos \theta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ -kUU_y \\ \Pi_A - kUU_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_G = \begin{vmatrix} -\ell_1 \Pi_A \sin \theta + k\ell_1 UU_z \sin \theta + k\ell_1 \cos \theta UU_y \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

2.3 Equations dynamiques du mouvement

$$\text{TRC : } M\vec{a}_G = \vec{F}_{ext} \iff \begin{vmatrix} M0 = 0 \\ M\ddot{y} = -kUU_y \\ M\ddot{z} = -Mg + \Pi_A - kUU_z \end{vmatrix} \quad \text{TMC en G : } \frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{M}_G \text{ or}$$

$$\vec{\sigma}_G = \vec{\sigma}_G^* = J\dot{\theta}\vec{x} \implies J\ddot{\theta} = M_x = -\ell_1 \Pi_A \sin \theta + k\ell_1 UU_z \sin \theta + k\ell_1 \cos \theta UU_y$$

2.4 Régime établi

2.4.1 en régime établi $\vec{a}_G = \vec{0} \implies U_y = 0 \implies \vec{U}_0 = U_z \vec{z} \perp \vec{V}$

$$\text{or : } U_z = \frac{\Pi_A - Mg}{kU_0} > 0 \implies U_0 = |U_z| = \sqrt{\frac{\Pi_A - Mg}{k}} = 4.5 \text{ m.s}^{-1}$$

2.4.2 en régime établi TMC devient $0 = -\ell_1(\Pi_A - kU_0 U_z) \sin \theta = -\ell_1 Mg \sin \theta = 0 \implies \theta = 0$ (ou π)

2.5 Perturbation verticale du régime établi

2.5.1 en régime établi perturbé $\ddot{y} = 0$ et $\dot{\theta} = 0$ sont encore valables donc : $U_y = 0$ et $U = |U_z|$

TRC sur Oz : $M\ddot{z} = -Mg + \Pi_A - kUU_z$ avec $U_z = \dot{z} - \ell_1 \dot{\theta} \sin \theta = \dot{z} > 0$ (ascension), il vient :

$$M\dot{\varepsilon}_z = -Mg + \Pi_A - k(U_0 + \varepsilon_z)^2$$

2.5.2 $M\dot{\varepsilon}_z \approx \underbrace{-Mg + \Pi_A - kU_0^2}_{=0} (1 + 2\frac{\varepsilon_z}{U_0})$ d'après 2.4.1 on aura $\frac{d\varepsilon_z}{dt} + \frac{2kU_0}{M}\varepsilon_z = 0$ soit $\alpha_1 = kU_0$ A.N :

$$\alpha_1 = 29 \text{ kg.s}^{-1}$$

2.5.3 $\varepsilon_z(t) = \varepsilon_z(0)e^{-\frac{2\alpha_1}{M}t} \rightarrow 0$ si $t \rightarrow +\infty$ le régime établi est donc stable.

2.5.4 $\tau = \frac{M}{2\alpha_1}$ or $M = 30 \text{ kg} \implies \tau = 0.5 \text{ s}$ le régime ne tarde pas à s'établir

2.6 Perturbation horizontale du régime établi

2.6.1 on a :

$$\vec{U} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{y} - \ell_1 \dot{\theta} \cos \theta - V \\ \dot{z} - \ell_1 \dot{\theta} \sin \theta \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 0 \\ \varepsilon_y - \ell_1 \dot{\varepsilon}_\theta \\ \dot{z} - \ell_1 \dot{\varepsilon}_\theta \varepsilon_\theta \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 0 \\ \varepsilon_y - \ell_1 \dot{\varepsilon}_\theta \\ \dot{z} \end{vmatrix}$$

$$\text{d'où : } U = \sqrt{U_0^2 + (\varepsilon_y - \ell_1 \dot{\varepsilon}_\theta)^2} \approx U_0$$

2.6.2 TRC sur Oy : $M\dot{\varepsilon}_y = -kU_0 U_y = -kU_0(\varepsilon_y - \ell_1 \dot{\varepsilon}_\theta)$

et TMC : $J\ddot{\varepsilon}_\theta = -\ell_1(\Pi_A - kU_0^2)\varepsilon_\theta + k\ell_1 U_0(\varepsilon_y - \ell_1 \dot{\varepsilon}_\theta) = -\ell_1 Mg \varepsilon_\theta + k\ell_1 U_0(\varepsilon_y - \ell_1 \dot{\varepsilon}_\theta)$

$$\text{donc : (9) } \begin{cases} M \frac{d\varepsilon_y}{dt} + \alpha_1 \varepsilon_y = \alpha_2 \frac{d\varepsilon_\theta}{dt} \\ J \frac{d^2 \varepsilon_\theta}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d\varepsilon_\theta}{dt} + \alpha_4 \varepsilon_\theta = \alpha_2 \varepsilon_y \end{cases}$$

$$\text{avec : } \alpha_1 = kU_0 \quad \alpha_2 = kU_0 \ell_1 \quad \alpha_3 = kU_0 \ell_1^2 \quad \alpha_4 = \ell_1 Mg$$

$$\alpha_1 = 29 \text{ kg.s}^{-1} \quad \alpha_2 = 58 \text{ kg.s}^{-1}.m \quad \alpha_3 = 116 \text{ kg.s}^{-1}.m^2 \quad \alpha_4 = 589 \text{ N.m}$$

2.6.3

2.6.3.1 (10) injecté dans (9) donne :
$$\begin{cases} (M\omega + \alpha_1)A - \alpha_2\omega B = 0 \\ -\alpha_2 A + (J\omega^2 + \alpha_3\omega + \alpha_4)B = 0 \end{cases}$$

A et B étant non nuls soit : $\Delta = (M\omega + \alpha_1)(J\omega^2 + \alpha_3\omega + \alpha_4) - \alpha_2^2\omega = 0$

il vient : $C_1 = \frac{M\alpha_3 + J\alpha_1}{JM} = 2.5 \text{ s}^{-1}$ $C_2 = \frac{M\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2^2}{JM} = 7.6 \text{ s}^{-2}$ $C_3 = \frac{\alpha_1\alpha_4}{JM} = 7.4 \text{ s}^{-3}$

2.6.3.2 le système (9) est linéaire donc par superposition :
$$\begin{cases} \varepsilon_y(t) = A_1 e^{\omega_1 t} + A_2 e^{\omega_2 t} + A_3 e^{\omega_3 t} \\ \varepsilon_\theta(t) = B_1 e^{\omega_1 t} + B_2 e^{\omega_2 t} + B_3 e^{\omega_3 t} \end{cases}$$

En notation réelle :
$$\begin{cases} \varepsilon_\theta(t) = A e^{-\frac{t}{\tau_1}} + e^{-\frac{t}{\tau_2}} (B \cos \Omega t + C \sin \Omega t) \\ \varepsilon_y(t) = A' e^{-\frac{t}{\tau_1}} + e^{-\frac{t}{\tau_2}} (B' \cos \Omega t + C' \sin \Omega t) \end{cases}$$

les conditions initiales sont :

$$\varepsilon_\theta(0) = A + B$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta(0) = 0 = -\frac{A}{\tau_1} - \frac{B}{\tau_2} + C\Omega$$

(système écarté de sa position d'équilibre mais lâché sans vitesse initiale)

d'après (9) :

$$\alpha_2 \varepsilon_y(0) = J \left(\frac{A}{\tau_1^2} + \frac{B}{\tau_2^2} - \frac{2C\Omega}{\tau_2} - B\Omega^2 \right) + \alpha_4 \varepsilon_\theta(0)$$

par remplacement :

$$A =$$

$$B =$$

et

$$C =$$

2.6.3.3 $\varepsilon_y(t) = a e^{-\frac{t}{\tau_1}} + b e^{-\frac{t}{\tau_2}} \cos(\Omega t + \varphi) \rightarrow 0$ lorsque $t > 5 \sup(\tau_1, \tau_2) = 15.7 \text{ s}$.

fin du corrigé